Ejercicios de Análisis Funcional
Relación 5 - Espacios de Hilbert

1. Sea $\mathcal{H}$ un espacio prehilbertiano. Prueba que

$$\|y\|^2\big(\|x\|^2\|y\|^2 - |(x \mid y)|^2\big) = \big\|\|y\|^2 x - (x \mid y)y\big\|^2 \quad (x, y \in \mathcal{H})$$

   Deduce a apartir de aquí la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

2. Sea $\mathcal{H}$ un espacio prehilbertiano. Prueba que si $x, y \in \mathcal{H}$ son tales que $\|x\| = \|y\| = \left\|\frac{x+y}{2}\right\|$, entonces $x = y$. En particular, la esfera unidad de $\mathcal{H}$ no contiene segmentos no triviales.

3. Sea $\mathcal{H}$ un espacio prehilbertiano. Prueba que:

   a) Si $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ son dos sucesiones en $B_{\mathcal{H}}$ que verifican $\{\|x_n + y_n\|\} \to 2$ entonces $\{\|x_n - y_n\|\} \to 0$.

   b) Si una sucesión $\{x_n\}$ y $x \in \mathcal{H}$ verifican que $\{(x_n \mid x)\} \to \|x\|^2$ y $\{\|x_n\|\} \to \|x\|$, entonces $\{x_n\} \to x$.

4. Da una demostración directa del teorema de Riesz-Frèchet para el caso de un espacio de Hilbert separable.

5. Sea $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ un sistema ortonormal en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Prueba que para todo $f \in \mathcal{H}^*$ se verifica que $\lim\{f(u_n)\} = 0$.

6. En el espacio vectorial $X = \left\{x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^2 < \infty\right\}$ se considera el producto escalar definido para todo $x, y \in X$ por

$$\langle x | y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x(n)\overline{y(n)}}{n}$$

   Prueba que la norma definida en X por dicho producto escalar no es completa. Estudia si dicha norma es completa en el espacio $Y = \left\{x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x(n)|^2}{n} < \infty\right\}$.

   Sugerencia. Considera la sucesión $\{x_n\}$ dada por $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \mathrm{e}_k$ donde los e_k son los vectores unidad.

7. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $a \in \mathcal{H}$, $a \neq 0$. Prueba que $\operatorname{dist}(x, \{a\}^{\perp}) = \dfrac{|(x \mid a)|}{\|a\|}$.

8. Sea $\varphi : L_2[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por $\varphi(x) = \displaystyle\int_0^1 t^{-\frac{1}{3}} x(t)\,\mathrm{d}t$. Prueba que φ es un funcional lineal continuo y calcula su norma.

9. Sea $T : L_2[0,1] \longrightarrow L_2[0,1]$ dado por $(Tx)(t) = t \displaystyle\int_0^1 x(s)\,\mathrm{d}s$ para todo $x \in L_2[0,1]$. Prueba que T es un operador lineal continuo y calcula su norma.

10. Sea $T : L_2[0,1] \longrightarrow L_2[0,1]$ dado por $(Tx)(t) = \displaystyle\int_0^t x(s)\,\mathrm{d}s$ para todo $x \in L_2[0,1]$. Prueba que T es un operador lineal continuo y $\|T\| \leqslant 1/\sqrt{2}$.

11. Sea M un subespacio cerrado de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, y sea $z \in \mathcal{H}$. Prueba que

$$\min\{\|z - x\| : x \in M\} = \max\left\{|(z \mid y)| : y \in M^{\perp}, \|y\| = 1\right\}$$

Sugerencia. Sea $z = u + v$ con $u \in M$, $v \in M^{\perp}$. Se tiene $\|v\| = \|z - u\| = \min\{\|z - x\| : x \in M\}$. Prueba que $\|v\| = \max\{|(z \mid y)| : y \in M^{\perp}, \|y\| = 1\}$.

12. Calcula el mínimo valor de $\displaystyle\int_{-1}^{1} \left|x^3 - a - bx - cx^2\right|^2 \mathrm{d}x$ cuando $a, b, c \in \mathbb{C}$.

13. Prueba que

$$M = \left\{ f \in L_2[0,4] : \int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x = 0 \right\}$$

es un subespacio cerrado de $L_2[0,4]$. Calcula el punto más próximo en M a la función característica del intervalo $[0,1]$.

14. Sea M un subespacio cerrado de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Prueba que los espacios $M^{\perp}$ y $\mathcal{H}/M$ son isométricamente isomorfos.

15. Se considera el espacio prehilbertiano $(c_{00}, \|\ \|_2)$. Sea $M = \left\{ x \in c_{00} : \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x(n)}{n} = 0 \right\}$. Prueba que M es un subespacio cerrado de c_{00} y calcula $M^{\perp}$.¿Es cierto el teorema de Riesz-Fisher en c_{00}?

16. Sean M y N subespacios cerrados de un espacio de Hilbert tales que $M \perp N$. Prueba que el subespacio $M + N$ es cerrado.

17. Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $P : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ un operador lineal continuo. Prueba que P es la proyección ortogonal sobre $M = P(\mathcal{H})$ si, y sólo si, es idempotente $P^2 = P$ y verifica que $(Px \mid y) = (x \mid Py)$ para todos $x, y \in \mathcal{H}$.

18. Sea $M = \operatorname{Lin}(\{\mathrm{e}_1 - \mathrm{e}_2, \mathrm{e}_2 - \mathrm{e}_3\}) \subset \ell_2$. Describe el complemento ortogonal de M en ℓ_2 y las proyecciones ortogonales sobre M y $M^\perp$.

19. Sea $A = \{\mathrm{e}_{2n-1} + \mathrm{e}_{2n} : n \in \mathbb{N}\} \subset \ell_2$. Describe los espacios $M = A^\perp$ y $M^\perp$ y calcula las proyecciones ortogonales sobre los mismos.

20. Sea $M = \{x \in \ell_2 : x(1) - x(2) = x(2) - x(3) = 0\}$. Calcula las proyecciones ortogonales de ℓ_2 sobre M y sobre $M^\perp$.

21. Prueba, usando la complitud del sistema trigonométrico, que la familia de funciones
$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nt), \frac{1}{\sqrt{\pi}} \operatorname{sen}(nt) : n \in \mathbb{N} \right\}$$
es una base ortonormal del espacio de Hilbert $L_2[-\pi, \pi]$ con el producto escalar usual.

    Prueba que para $f \in L_2[-\pi, \pi]$ la mejor aproximación a f por una suma del tipo
$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} (a_k \cos(kx) + b_k \operatorname{sen}(kx))$$
con $N \in \mathbb{N}$ fijo, se obtiene cuando
$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) \, \mathrm{d}x \,, \qquad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen}(kx) \, \mathrm{d}x$$
Los números a_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$ se llaman **coeficientes de Fourier coseno**, y los números b_k, $k = 1, 2, \ldots$ se llaman **coeficientes de Fourier seno** de f.

    Prueba que
$$\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(|a_k|^2 + |b_k|^2 \right) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t$$

22. Calcula los desarrollos de Fourier en el sistema trigonométrico de las funciones $f(t) = t$ y $f(t) = t^2$ y prueba que
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$